Ασκηση 1

Επαληθεύστε το Θ. GREEN για $B=[0,1]\times[0,1]$ και

$$\begin{pmatrix}P\\Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y\\6x\end{pmatrix}$$

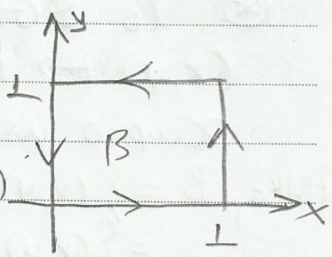
Λύση

$$\int_B\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d(x,y)=\int_B(6-2)\,d(x,y)=4\int_B 1\,d(x,y)$$

$$(=4V(B))\overset{\text{fubini}}{=}4\int_0^1\int_0^1 1\,dx\,dy=4\cdot\int_0^1 1\,dy=4.$$

$$\oint_{\partial B}(2y,6x)\cdot d(x,y)=\sum_{i=1}^{4}\int_{\gamma_i}(2y,6x)\cdot d(x,y)$$

$$=\int_{\gamma_1}(2y,6x)\,d(x,y)+\ldots+\int_{\gamma_4}(2y,6x)\,d(x,y)\;(1)$$



όπου,

- $$\int_{\gamma_1}(2y,6x)\,d(x,y)=\int_0^1\left(2\gamma_1^{(2)},6\gamma_1^{(1)}\right)\cdot\left(\gamma_1^{(1)\prime},\gamma_1^{(2)\prime}\right)(t)\,dt\;\circledast$$

με,

$$\gamma_1(t)=\left(\gamma_1^{(1)}(t),\gamma_1^{(2)}(t)\right)=(t,0)\;;\;\forall t\in[0,1]$$

Άρα, $\circledast\rightsquigarrow\int_0^1\left(2\gamma_1^{(2)}(t),6\gamma_1^{(1)}(t)\right)\left(\gamma_1^{(1)\prime}(t),\gamma_1^{(2)\prime}(t)\right)dt=$

$$=\int_0^1(0\cdot1+6t\cdot0)\,dt=$$

και

- $$\int_{\gamma_3}(2y,6x)\,d(x,y)=\int_0^1\left(2\gamma_3^{(2)},6\gamma_3^{(1)}\right)\cdot\left(\gamma_3^{(1)\prime}(t),\gamma_3^{(2)\prime}(t)\right)dt\;(*)(*)$$

$$\gamma_3(t)=\left(\gamma_3^{(1)}(t),\gamma_3^{(2)}(t)\right)=(1,0)+(1-1,1-0)+t(-1,0)=(1-t,1)$$

Άρα, $(*)(*)\rightsquigarrow\int_0^1\left(2\gamma_3^{(1)}(t),6\gamma_3^{(2)}(t)\right)\left(\gamma_3^{(1)\prime}(t),\gamma_3^{(2)\prime}(t)\right)dt=$

$$=\int_0^1\left(2(1-t),6\cdot1\right)(-1,0)\,dt=\int_0^1(-2+2t)\,dt=$$

όμοια, βρίσκουμε και τα
$\gamma_2(t)=(1,t)$ και $\gamma_4(t)=(0,1-t)$ και συνεχίζουμε όμοια!!!

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να υπολογιστεί το εμβαδό του κυκλικού δίσκου κέντρου (0,0) και ακτίνας $r>0$ με χρήση του Θ. Green

ΛΥΣΗ

$$\int_{\partial B(\text{θετικά})} (P,Q)\cdot d(x,y) = \int_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x,y)$$

Εμβαδό του B $\quad V(B) = \int_B 1\, d(x,y) = \int_B \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \right) d(x,y) \Rightarrow$

$\underset{\text{Green}}{\Rightarrow} V(B) = \frac{1}{2} \int_{\partial B(\text{θετικά})} (-y,x)\, d(x,y)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{όπου } P(x,y) = -\frac{1}{2}y \text{ και} \\ Q(x,y) = \frac{1}{2}x \end{array} \right\}$

⊛ Το Θ.Green θα μπορεί να εφαρμοστεί αφού $(x,y) \mapsto (-y,x)$ είναι $C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ το B είναι κανονικό χωρίο ως προς τους άξονες x και y

ΓΕΝΙΚΑ, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,\beta] : y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)]\} =$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [a,\beta] : x \in [\psi_1(y), \psi_2(y)]\}$

$\varphi_2(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ και $\varphi_1(x) = -\sqrt{r^2-x^2}$

Διότι $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-r,r] : -\sqrt{r^2-x^2} \le y \le \sqrt{r^2-x^2}\}$

Και αφού πρόκειται για το σύνορο του B (∂B) τότε

$(x^2+y^2 = r^2 \Rightarrow -x^2+r^2 = y^2 \underset{y>0}{\Rightarrow} y = \sqrt{r^2-x^2})$

Ενώ $\psi_2(y) = \sqrt{r^2-y^2}$ και $\psi_1(y) = -\sqrt{r^2-y^2}$

Διότι $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-r,r] : -\sqrt{r^2-y^2} \le x \le \sqrt{r^2-y^2}\}$

και αφού μιλάμε για το σύνορο του B (∂B) τότε

$(x^2+y^2 = r^2 \Rightarrow -y^2+r^2 = x^2 \Rightarrow x \underset{x>0}{=} \sqrt{r^2-y^2})$.

Διότι για να ισχύει το Θ.Green θα πρέπει το χωρίο να είναι κανονικό ως προς x και y.

Και προφανώς χρησιμοποιούμε το παραμετρικό $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $t \in [0,2\pi]$.

$$\frac{1}{2}\int_{\partial B(\text{θετικά})} (-y,x)\, d(x,y) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-r\sin t, r\cos t)\cdot(-r\sin t, r\cos t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} r^2\, dt = \frac{2\pi r^2}{2} = \pi r^2$$

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ:

ΕΙΣΑΓΩΓΗ: ...

Γραφήματα συναρτήσεων $f: K \to \mathbb{R}$ με $K \subset \mathbb{R}^2$ και f θα πρέπει να ικανοποιούν κάποιες συνθήκες είναι παραδείγματα επιφανειών στον $\mathbb{R}^3$. $\Gamma_f = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in K\} \subset \mathbb{R}^3$.

Δηλαδή το γράφημα της f είναι "εμβαπτισμένο" στον $\mathbb{R}^3$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $K \subset \mathbb{R}^2$ συμπαγές και J-μετρήσιμο (μέσα σε ένα $M \subset \mathbb{R}^2$ ανοιχτό), ονομάζουμε (παραμετρική) επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ τον περιορισμό $\phi|_K : K \to \mathbb{R}^3$ μιας C^1 συνάρτησης $\phi : M \to \mathbb{R}^3$ και επιφάνεια την εικόνα $\varphi(K)$ με παραμετρική αναπαράσταση $(u,v) \longmapsto \varphi(u,v) = (x,y,z)^T$ και σύνολο παραμέτρων K